(1) C 上の点 P の x 座標を t とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= t^2 + \left(t^2 - a\right)^2 \\ &= \left(t^2 - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

(a) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

AP は t^2 の増加関数となり，$t^2 = 0$ つまり $t = 0$ のとき，最小値 $\mathrm{OA}(= a)$ をとる。

(b) $a > \dfrac{1}{2}$ のとき

AP は $t^2 = \dfrac{2a-1}{2}$ つまり，

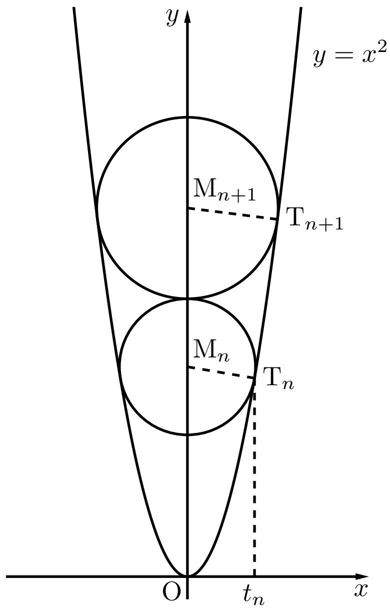
点 P の x 座標が $t = \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ のとき，

最小値 $\sqrt{a - \dfrac{1}{4}}$ をとる。

そして，$\sqrt{a - \dfrac{1}{4}} < a$ である。

以上より，求める a の最大値 a_0 は $\dfrac{1}{2}$ である。

(2) 円 O_n の中心を M_n，C との接点を $\mathrm{T}_n\left(t_n\,,\,{t_n}^2\right)$ とすると，(ハ) より $r_1 = 2a_0 = 1$ となるから，(1) の結果を考慮して，$t_n \fallingdotseq 0$ である。



直線 $\mathrm{M}_n\mathrm{T}_n$ は T_n における C の接線に垂直であるから，
その方程式は

$$2t_n(y - {t_n}^2) = -(x - t_n)$$
$$y = -\frac{1}{2t_n}x + {t_n}^2 + \frac{1}{2}$$

と表せられる。

これと y 軸の交点が M_n であるから，$\mathrm{M}_n\left(0\,,\,{t_n}^2 + \frac{1}{2}\right)$
となる。

また，

$$ {r_n}^2 = {t_n}^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

さらに，(イ)，(ロ) より

$$r_{n+1} + r_n = {t_{n+1}}^2 + \frac{1}{2} - \left({t_n}^2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= {t_{n+1}}^2 - {t_n}^2$$

ここで，① より

$$r_{n+1} - r_n = {r_{n+1}}^2 - {r_n}^2$$
$$= (r_{n+1} + r_n)(r_{n+1} - r_n)$$

$r_{n+1} - r_n > 0$ であるから，

$$r_{n+1} - r_n = 1$$
$$r_n = r_1 + (n-1)\cdot 1$$

そして，$r_1 = 1$ であるから，

$$r_n = n$$

である。

(3) (2) から，$r_1 = 1$，$\mathrm{M}_1\left(0,\,\frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{T}_1\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{3}{4}\right)$ と
なる。

よって，$\angle \mathrm{T}_1\mathrm{M}_1\mathrm{O} = \frac{\pi}{3}$ となる。

以上より，

$$S = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2\right) dx - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

となる。