（1）　$a_1=\frac{1}{2}$，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\quad(n=1，\ 2，\ 3，\ \cdots)\cdots\cdots①$$

①から，$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{k^2}$　……②

②－①から，$a_{n+1}-a_n=\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}$

$$n(n+2)a_{n+1}=(n+1)^2a_n$$

$$\frac{n+2}{n+1}a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$$

よって，数列$\left\{\frac{n+1}{n}a_n\right\}$は定数数列となり，

$$\frac{n+1}{n}a_n=\frac{1+1}{1}a_1=\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}=1$$

よって，

$$a_n=\frac{n}{n+1}$$

（2）　$a_1=1$，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\ (n=1，\ 2，\ 3，\ \cdots)\cdots\cdots③$$

③から $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{k}$　……④

④－③から，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_{n+1}}{n+1}\qquad na_{n+1}=(n+1)a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$$

よって，数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$は定数数列となり，

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$$

よって，

$$a_n=n$$

（3）　$a_1=1$，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k\ (n=1，\ 2，\ 3，\ \cdots)\cdots\cdots⑤$$

⑤から，

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}ka_k\quad\cdots\cdots⑥$$

⑥－⑤から，

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)a_{n+1}$$

$$na_{n+1}=-a_n$$

両辺に$(n-1)!$をかけて，$n(n-1)!a_{n+1}=-(n-1)!a_n$

$$n!a_{n+1}=-(n-1)!a_n$$

よって，数列$\{(n-1)!a_n\}$は公比-1の等比数列である

から，

$$(n-1)!a_n=(1-1)!a_1(-1)^{n-1}=0!a_1(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$$

よって，

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$