（１） C_1とC_2の接点のx座標をpとすると，$p>0$で

$a\log p = p^2 - b$ ・・・①

$\dfrac{a}{p} = 2p$ ・・・・・・②

②から　$p^2 = \dfrac{a}{2}$ で，$p>0$より　$p=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

これを①に代入して

$a\log\sqrt{\dfrac{a}{2}} = \dfrac{a}{2} - b$

よって，$b = \dfrac{a}{2}\left(1-\log\dfrac{a}{2}\right)$

（２） $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}=0$ であり，$\log\dfrac{a}{2}=-t$ とおくと，

$$\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\log\frac{a}{2} = -\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$$

よって，$\displaystyle\lim_{a\to+0} b = 0$

（３） $f(a)=\dfrac{a}{2}\left(1-\log\dfrac{a}{2}\right)$ とおくと，

$$f'(a) = -\frac{1}{2}\log\frac{a}{2}$$

$$f''(a) = -\frac{1}{2a} < 0$$

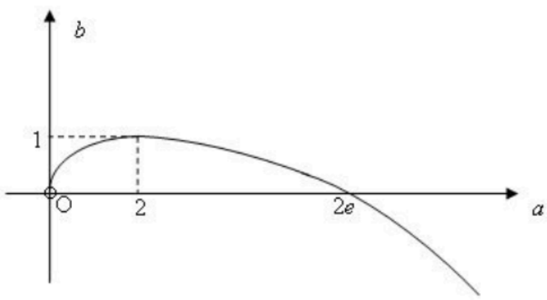
よって，曲線C_3は上に凸であり，$f(a)$の増減は次のようになる。

a	(0)		2	
$f'(a)$	／	+	0	−
$f(a)$	／	↗	1	↘

また，$f(a)=0$を解いて，$a=2e$

さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+\infty} f(a) = -\infty$

以上から，グラフC_3は次のようになる。



（４） $\displaystyle S=\int_e^{2e}\frac{a}{2}\left(1-\log\frac{a}{2}\right)da$

$$=\int_e^{2e}\frac{a}{2}da - \int_e^{2e}\frac{a}{2}\log\frac{a}{2}da$$

$$=\left[\frac{1}{4}a^2\right]_e^{2e} - \left[x^2\log x - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{e}{2}}^{e}$$

$$=\frac{e^2}{8}(3-2\log 2)$$