平成30年度 予想問題

＜東京医科大学＞

数　　学

（60分）

東大螢雪会

1 (1)　関数 $\displaystyle\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,dt$ がある。

この関数の $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ における最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$，最小値は $\boxed{\text{イ}} - \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2)　m，n を自然数とする。整式 $\left(1+x^2\right)^m\left(1+x^3\right)^n$ を展開すると，x^6 の係数が 20 になった。

このとき，$(m\,,\,n) = \left(\boxed{\text{エ}}\,,\,\boxed{\text{オ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{カ}}\,,\,\boxed{\text{キ}}\right)$ である。

ただし，$\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする。

また，x^8 の係数は $m = \boxed{\text{エ}}$ のとき，$\boxed{\text{クケ}}$，$m = \boxed{\text{カ}}$ のとき，$\boxed{\text{コサ}}$ である。

2 (1)　数直線上の点 Q は，2 枚のコインを同時に投げて，どちらも表が出たら $+1$ 移動し，どちらも裏が出たら -1 移動し，その他の場合は移動しない。

最初，点 Q は数直線上の原点にある。この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を a_n とする。この試行を 4 回行い，a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 のうち，最大の値を X とする。

$a_4 = 0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$ である。

また，$a_4 = 0$ となる条件のもとで，$X = 0$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　実数 t は $t > 1$ を満たす。点 $\left(\dfrac{1}{2}\,,\,t\right)$ から，円 $x^2 + y^2 = 1$ に異なる 2 本の接線を引き，2 つの接点を通る直線を l とする。

t を $t > 1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点の座標は $\left(\boxed{\text{ク}}\,,\,\boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

3 2 つの曲線 $C_1 : y^2 = 4x$，$C_2 : x^2 = 4p^3y$　(p は正の定数とする) がある。C_1 と C_2 の原点以外の交点の 1 つを $\mathrm{A}(a\,,\,b)$ とする。

(1)　点 A における曲線 C_1，C_2 の接線のなす角を θ とするとき，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \cdot \dfrac{p}{p^2+1}$ となり，$\tan\theta$ が最大となるのは $p = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

(2)　$p = \boxed{\text{ウ}}$ のとき，曲線 C_1，C_2 の両方に接する直線を l とする。このとき，2 つの曲線 C_1，C_2 および直線 l で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

4 O を原点とする空間の 4 点 A$(3\,,\,0\,,\,0)$，B$(0\,,\,2\,,\,0)$，C$(0\,,\,0\,,\,1)$，D$\left(4\,,\,\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)$ がある。
$0 \leqq x \leqq 1$ である実数 x を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-x)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + x\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を満たす点を F，A から線分 BC へ下ろした垂線と線分 BC の交点を G，線分 FC と線分 AG の交点を H とする。

(1)　四角形 BFHG の面積を S_1，三角形 CGH の面積を S_2 とするとき，

$$14 \leqq \frac{S_1}{S_2} \leqq 22$$

を満たす x の範囲は $\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2)　x が $\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ の範囲で変化するとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|^2$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

5 k は $k > 2$ を満たす定数とする。不等式 $\log_x y + \log_x (k-y) > 2$ を満たす点 $(x\,,\,y)$ 全体の集合を図示せよ。